Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (A)
ZS 2021/2022

Úloha 1 (13 bodů)**.** V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{n^2+2n+\log(n)} - \sqrt{n+1}\right)}{\log(n^2+n)} n^{\alpha}.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0_+} \left(\left(\frac{1}{\sin(\sqrt[5]{x})}\right)^{\sqrt{x}}\right)^{\frac{\sqrt{\operatorname{cotg}(x)}}{\log(x)}}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \sin^2\left(\min\left\{x, x^2\right\}\right).$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+2x+1}{x+2}}.$$

řešení

Úloha 1. Výsledek je $\frac{1}{8}$ pro $\alpha = \frac{3}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha > \frac{3}{2}$ a 0 pro $\alpha < \frac{3}{2}$.

Úloha 2. $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

Úloha 3. Položme $g(x) = \min\{x, x^2\}$. Pak funkce g je spojitá a definovaná na $\mathbb{R}$, neboť minimum z dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Protože

$$f(x) = \sin^2(g(x)),$$

tak f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$. Používáme fakt, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Dále

$$g(x) = \begin{cases} x & : x \in (-\infty, 0> \cup <1, +\infty), \\ x^2 & : x \in <0, 1>. \end{cases}$$

Pak

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & : x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ 2x & : x \in (0, 1). \end{cases}$$

a

$$f'(x) = \sin(2g(x))g'(x),$$

kde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Protože f je spojitá v bodech $0, 1$, tak můžeme počítat jednostranné derivace v těchto bodech jako příslušné jednostranné limity derivací a obdržíme: $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, $f'_+(1) = \sin(2)$ a $f'_-(1) = 2\sin(2)$. Tedy derivace v bodě 1 neexistuje a $f'(0) = 0$.

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to-2_\pm} f(x) = \pm\infty$. $f'(x) = \frac{x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^4}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. $f'_\pm(-1) = \pm\infty$. Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3>, <-1, +\infty)$, klesající na intervalech $<-3, -2), (-2, -1>$, má lokální minimum v bodě -1 rovné 0 a má lokální maximum v bodě -3 rovné $-\sqrt[3]{4}$. $H_f = (-\infty, -\sqrt[3]{4} > \cup < 0, +\infty)$. Pro $x \neq -2, -1$ máme $f''(x) = -\frac{2(x^2+6x+6)}{9\sqrt[3]{(x+1)^4(x+2)^7}}$. Funkce f je konvexní na intervalech $(-\infty, -3-\sqrt{3}), (-2, -3+\sqrt{3})$, konkávní na intervalech $(-3-\sqrt{3}, -2), (-3+\sqrt{3}, -1), (-1, +\infty)$ a v bodech $-3\pm\sqrt{3}$ má inflexní body. Asymptoty funkce f v $\pm\infty$ neexistují.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (B)
ZS 2021/2022

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(n^6-2\right)^9-\left(n^9+27\right)^6+18\left(n^8+2\right)^6\right)\left(\left(1+\frac{1}{21n^5}\right)^7-\left(1+\frac{1}{16n^6}\right)^8\right)^9.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^2+\operatorname{arccotg}(n)}-n}}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x)=\sqrt{||x|-2|}(\cos(x)-1).$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Uvažujte funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{2x^3+3x^2+x+4},\\ g(x) &= f_{|[0,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

Neboli funkce g je restrikcí funkce f na interval $[0,+\infty)$. Vyšetřete průběh funkce g.

Řešení

Úloha 1. $-\frac{2}{243}$.

Úloha 2. e^{-3}.

Úloha 3. f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sign}(|x|-2)}{2\sqrt{||x|-2|}}\operatorname{sign}(x)(\cos(x)-1)-\sqrt{||x|-2|}\sin(x) & : x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\pm2\},\\ 0 & : x=0,\end{cases}$$

$f'_\pm(2)=f'_\pm(-2)=\mp\infty$ a tedy $f'(\pm2)$ neexistuje.

Úloha 4. $D_g=C_g=<0,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $g(0)=\sqrt[3]{4}$. $g'(x)=\frac{6x^2+6x+1}{3\sqrt[3]{(2x^3+3x^2+x+4)^2}}$, $x>0$. Funkce g je rostoucí na intervalu $<0,+\infty)$ a má globální minimum v bodě 0 rovné $\sqrt[3]{4}$. $H_g=<\sqrt[3]{4},+\infty)$. Pro $x>0$ máme $g''(x)=\frac{2\left(-3x^2+69x+35\right)}{9\sqrt[3]{(2x^3+3x^2+x+4)^5}}$. Funkce g je konvexní na intervalu $(0,\alpha)$, konkávní na intervalu $(\alpha,+\infty)$ a v bodě α má inflexní bod, kde $\alpha=\frac{23+\sqrt{575+\frac{2}{3}}}{2}$. Asymptota funkce g u $+\infty$ je funkce $\sqrt[3]{2}x+4^{-\frac{1}{3}}$.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (C)
ZS 2021/2022

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2022)!}{n^{2022}} \cdot \frac{\sqrt{(n!)^2+(2022)^n}-\sqrt{(n!)^2-n^{2022}}}{(2022)^n}.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 1} \left(\log(x)-\cos(\pi\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arccotg}(x)}}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = (x+1)\arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

(Výraz $[z]$ značí celou část čísla $z \in \mathbb{R}$.)

Úloha 4 (13 bodů)**.** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \;=\; \frac{x^2+5x+6}{e^{|x+1|}}.$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{1}{2}$.

Úloha 2. e.

Úloha 3. f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + 2\operatorname{sign}(x^2-1)\frac{x+1}{x^2+1} & : x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}, \\ \pi & : x = -1, \end{cases}$$

$f'_{\pm}(1) = \pm 2$ a tedy $f'(1)$ neexistuje.

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. $f'(x) = e^{-|x+1|}\left(2x+5-\operatorname{sign}(x+1)(x^2+5x+6)\right)$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $f'_{\pm}(-1) = \mp 2 + 3$. Funkce f je rostoucí na intervalech $\left(-\infty, \frac{-7-\sqrt{5}}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{-7+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$, klesající na intervalech $\left\langle \frac{-7-\sqrt{5}}{2}, \frac{-7+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, má globální maximum v bodě $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ rovné $(2+\sqrt{5})e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, lokální maximum v bodě $\frac{-7-\sqrt{5}}{2}$ rovné $(2+\sqrt{5})e^{-\frac{\sqrt{5}+5}{2}}$ a globální minimum v bodě $\frac{-7+\sqrt{5}}{2}$ rovné $(2-\sqrt{5})e^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}$. $H_f = \left\langle (2-\sqrt{5})e^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}, (2+\sqrt{5})e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right\rangle$. Pro $x \neq -1$ máme

$$f''(x) = e^{-|x+1|}\left(x^2+5x+8-2\operatorname{sign}(x+1)(2x+5)\right).$$

Funkce f je konvexní na intervalech $(-\infty,-6)$, $(-3,-1)$, $(1,+\infty)$, konkávní na intervalech $(-6,-3)$, $(-1,1)$ a body $-6, -3, 1$ jsou inflexními body. Asymptoty funkce f v $\pm\infty$ jsou konstantní 0.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (D)
ZS 2021/2022

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{8^n + n^3} - \sqrt[7]{(128)^n - (20)^n}}.$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ je funkce f spojitá na svém definičním oboru, kde

$$f(x) := \begin{cases} \left(\sqrt{\operatorname{tg}(x)}\right)^{\frac{\alpha}{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{cotg}(x)}} & : x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}, \\ 2 & : x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^3 + x^2 - 2x)\left(e^{x^3-2x^2+x} - 1\right).$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \quad = \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^3 - 1}\right).$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{5}{16}$.

Úloha 2. $4\log(2)$.

Úloha 3. f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x^3 + x^2 - 2x)e^{x^3-2x^2+x}(3x^2 - 4x + 1) & : x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}, \\ -\infty & : x = -2, \\ 0 & : x = 1, \end{cases}$$

$f'_\pm(0) = \mp 1$ a tedy $f'(0)$ neexistuje.

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. $f'(x) = -\frac{3x^2}{x^6-2x^3+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Funkce f je klesající na intervalech $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ a nemá lokální extrém. $H_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Pro $x \neq 1$ máme $f''(x) = 6x\frac{2x^6-x^3-2)}{(x^6-2x^3+2)^2}$. Funkce f je konvexní na intervalech $(x_-, 0), (x_+, +\infty)$, konkávní na intervalech $(-\infty, x_-), (0, 1), (1, x_+)$ a v bodech $0, x_\pm$ má inflexní body, kde $x_\pm = \sqrt[3]{\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}}$. Asymptoty funkce f v $\pm\infty$ jsou konstantní 0.

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (E)
ZS 2021/2022

Úloha 1 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\left[\sqrt[n]{n^{\log(n)} + \pi^n + (\log(n))^{\sqrt{n}}}\right]},$$

kde $[x]$ značí celou část x.

Úloha 2 (13 bodů)**.** Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos\left(\log\left(x^3+x\right)\right) - \cos\left(\log\left(2x^3+x\right)\right)}{\sqrt{\arcsin(x)}\,\mathrm{arctg}(\sin(x))}.$$

Úloha 3 (11 bodů)**.** Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = (\cos(x))^{\max\left\{x+3, x^3-3x^2+3x+3\right\}}.$$

Úloha 4 (13 bodů)**.** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x-2| - 3\,\mathrm{arctg}(x+2).$$

Řešení

Úloha 1. Limita neexistuje.

Úloha 2. 0.

Úloha 3. Položme $g(x) = \max\left\{x+3, x^3-3x^2+3x+3\right\}$. Pak funkce g je spojitá a definovaná na $\mathbb{R}$, neboť maximum z dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Protože

$$f(x) = e^{\log(\cos(x))g(x)},$$

tak

$$D_f = \{x \in \mathbb{R};\ \cos(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

a f je spojitá na D_f. Používáme fakt, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Dále

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & : x \in (-\infty, 0 > \cup < 1, 2 >, \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 3 & : x \in < 0, 1 > \cup < 2, +\infty). \end{cases}$$

Pak

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & : x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2), \\ 3x^2 - 6x + 3 & : x \in (0, 1) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

a

$$f'(x) = f(x)(\log(\cos(x))g(x))' = f(x)(-\operatorname{tg}(x)g(x) + \log(\cos(x))g'(x)),$$

kde $x \in D_f \setminus \{0, 1\}$. Protože f je spojitá v bodech $0, 1$, tak můžeme počítat jednostranné derivace v těchto bodech jako příslušné jednostranné limity derivací a obdržíme: $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, $f'_-(1) = -4\cos^4(1)\operatorname{tg}(1)$ a $f'_+(1) = -\cos^4(1)(4\operatorname{tg}(1) - \log(\cos(1)))$. Tedy derivace v bodě 1 neexistuje a $f'(0) = 0$.

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \operatorname{sign}(x - 2) - \frac{3}{1+(x+2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. $f'_\pm(2) = \pm 1 - \frac{3}{17}$. Funkce f je rostoucí na intervalu $< 2, +\infty)$, klesající na intervalu $(-\infty, 2 >$ a má globální minimum v bodě 2 rovné $-3\operatorname{arctg}(4)$. $H_f =< -3\operatorname{arctg}(4), +\infty)$. Pro $x \neq 2$ máme $f''(x) = 6\frac{x+2}{(1+(x+2)^2)^2}$. Funkce f je konvexní na intervalech $(-2, 2), (2, +\infty)$, konkávní na intervalu $(-\infty, -2)$ a v bodě -2 má inflexní bod. Asymptoty funkce f v $\pm\infty$ jsou funkce $\pm(x - 2 - \frac{3\pi}{2})$.